روش شباهت به گزینه ایده‌آل فازی

(FTOPSIS)

۲-۱- مقدمه

در روش شباهت به گزینه ایده‌آل کلاسیک، برای تعیین وزن معیارها و رتبه‌بندی گزینه‌ها از مقادیر دقیق و معین استفاده می‌شود. در بسیاری از مواقع تفکرات انسان با عدم قطعیت همراه است و این عدم قطعیت در تصمیم‌گیری تأثیرگذار است. چنانچه در فصل قبل بیان شد، در این گونه موارد بهتر است از روش‌های تصمیم‌گیری فازی استفاده شود که روش شباهت به گزینه ایده‌آل فازی یکی از این روش‌هاست. در این حالت عناصر ماتریس تصمیم‌گیری یا وزن معیارها و یا هر دوی آن‌ها توسط متغیرهای زبانی که توسط اعداد فازی ارائه شده‌اند، ارزیابی شده و

جدول ۲-۱ – نمونه‌هایی از کاربرد روش شباهت به گزینه ایده‌آل فازی

ارائه دهنده	موضوع
Chen, Hwang (1992)	روش‌های تصمیم‌گیری چندمعیاره فازی و کاربردهای آن‌ها
Triantaphyllou, Lin (1996)	توسعه و ارزیابی پنج روش تصمیم‌گیری چند معیاره فازی
Liang (1999)	تصمیم‌گیری چند معیاره فازی بر اساس اصول ایده‌آل و ضد ایده‌آل
Chen (2000)	توسعه روش TOPSIS برای تصمیم‌گیری گروهی در محیط فازی
Tsaur et al. (2002)	ارزیابی کیفیت خدمات خطوط هوایی با استفاده از MCDM فازی
Chu (2002)	انتخاب محل کارخانه با استفاده از روش TOPSIS فازی
Chu, Lin (2003)	انتخاب ربات با استفاده از روش TOPSIS فازی
Abo-Sinna , Amer (2005)	توسعه روش TOPSIS برای مسائل چند هدفه غیر خطی
Wang, Elhag (2006)	کاربرد روش TOPSIS فازی در ارزیابی ریسک پل
Saghafian, Hejazi (2005)	تصمیم‌گیری چند معیاره با استفاده از روش TOPSIS فازی اصلاح شده
Jahanshahloo et al.(2006)	توسعه روش TOPSIS برای مسائل تصمیم‌گیری با داده‌های فازی
Chen, Lin, Huang (2006)	یک روش فازی برای انتخاب و ارزیابی تامین‌کننده
Bottani, Rizzi (2006)	روش TOPSIS فازی در خدمات لجستیکی
Wang, Chang (2007)	کاربرد روش TOPSIS در ارزیابی آموزش اولیه هواپیما تحت محیط فازی
Li (2007)	روش نسبت توافق یرای مسائل چند معیاره فازی
Benitez et al. (2007)	استفاده از اعداد فازی در ارزیابی کیفیت خدمات در صنعت هتل داری
Yang, Hung(2007)	روش‌های تصمیم‌گیری چند شاخصه در مسائل طراحی کارخانه
Wang, Lee (2007)	تعمیم روش TOPSIS برای مسائل چند معیاره گروهی فازی

۲-۲- مراحل روش شباهت به گزینه ایده‌آل فازی

چن[1] و هوانگ[2] مراحل استفاده از روش شباهت به گزینه ایده‌آل فازی را در یک مسأله تصمیم‌گیری چند معیاره با n معیار و m گزینه به شرح زیر ارائه کرده است:

1- Chen　　2- Hwang

مرحله ۱: تشکیل ماتریس تصمیم

با توجه به تعداد معیارها، تعداد گزینه‌ها و ارزیابی همه گزینه‌ها برای معیارهای مختلف، ماتریس تصمیم به صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$\tilde{D}=\begin{bmatrix}\tilde{x}_{11} & \tilde{x}_{12} & \dots & \tilde{x}_{1n}\\ \tilde{x}_{21} & \tilde{x}_{22} & \dots & \tilde{x}_{2n}\\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots\\ \tilde{x}_{m1} & \tilde{x}_{m2} & \dots & \tilde{x}_{mn}\end{bmatrix}$$

در صورتی که از اعداد فازی مثلثی استفاده شود، $\tilde{x}_{ij}=(a_{ij},b_{ij},c_{ij})$ عملکرد گزینه i ($i=1,2,\dots,m$) در رابطه با معیار j ($j=1,2,\dots,n$) می‌باشد. در صورتی که از اعداد فازی ذوزنقه‌ای استفاده شود، $\tilde{x}_{ij}=(a_{ij},b_{ij},c_{ij},d_{ij})$ عملکرد گزینه i ($i=1,2,\dots,m$) در رابطه با معیار j ($j=1,2,\dots,n$) می‌باشد.

اگر کمیته تصمیم‌گیرنده دارای k عضو باشد و رتبه‌بندی فازی kامین تصمیم‌گیرنده $\tilde{x}_{ijk}=(a_{ijk},b_{ijk},c_{ijk})$ (عدد فازی مثلثی) به ازای $i=1,2,\dots,m$ و $j=1,2,\dots,n$ باشد، با توجه به معیارها رتبه‌بندی فازی ترکیبی $\tilde{x}_{ij}=(a_{ij},b_{ij},c_{ij})$ گزینه‌ها را می‌توان بر اساس روابط زیر به دست آورد:

$$a_{ij}=\underset{k}{Min}\{a_{ijk}\} \tag{۱-۲}$$

$$b_{ij}=\frac{\sum_{k=1}^{K} b_{ijk}}{k} \tag{۲-۲}$$

$$c_{ij}=\underset{k}{Max}\{c_{ijk}\} \tag{۳-۲}$$

اگر کمیته تصمیم‌گیرنده دارای k عضو باشد و رتبه‌بندی فازی kامین تصمیم‌گیرنده $\tilde{x}_{ijk}=(a_{ijk},b_{ijk},c_{ijk},d_{ijk})$ (عدد فازی ذوزنقه‌ای) به ازای $i=1,2,\dots,m$ و $j=1,2,\dots,n$ باشد، رتبه‌بندی فازی ترکیبی $\tilde{x}_{ij}=(a_{ij},b_{ij},c_{ij},d_{ij})$ گزینه‌ها را با توجه به معیارها می‌توان از روابط زیر به دست آورد:

$$a_{ij}=\underset{k}{Min}\{a_{ijk}\} \tag{۴-۲}$$

$$b_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^{K} b_{ijk}}{k} \qquad (۵-۲)$$

$$c_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^{K} c_{ijk}}{k} \qquad (۶-۲)$$

$$d_{ij} = \underset{k}{Max}\{d_{ijk}\} \qquad (۷-۲)$$

مرحله ۲: تعیین ماتریس وزن معیارها

در این مرحله ضریب اهمیت معیارهای مختلف در تصمیم‌گیری، به صورت ذیل تعریف می‌شود:

$$\widetilde{W} = [\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2, \ldots, \widetilde{w}_n]$$

که در صورتی که از اعداد فازی مثلثی استفاده شود، هر یک از مؤلفه‌های w_j (وزن هر معیار) به صورت $\widetilde{w}_j = (w_{j1}, w_{j2}, w_{j3})$ و در صورتی که از اعداد فازی ذوزنقه‌ای استفاده شود، هر یک از مؤلفه‌های w_j به صورت $\widetilde{w}_j = (w_{j1}, w_{j2}, w_{j3}, w_{j4})$ تعریف خواهند شد.

اگر کمیته تصمیم‌گیرنده دارای k عضو باشد و ضریب اهمیت kامین تصمیم‌گیرنده $\widetilde{w}_{jk} = (w_{jk1}, w_{jk2}, w_{jk3})$ (عدد فازی مثلثی) به ازای $j = 1,2,\ldots,n$ باشد، رتبه‌بندی فازی ترکیبی $\widetilde{w}_j = (w_{j1}, w_{j2}, w_{j3})$ را می‌توان از روابط زیر به دست آورد:

$$w_{j1} = \underset{k}{Min}\{w_{jk1}\} \qquad (۸-۲)$$

$$w_{j2} = \frac{\sum_{k=1}^{K} w_{jk2}}{k} \qquad (۹-۲)$$

$$w_{j3} = \underset{k}{Max}\{c_{jk3}\} \qquad (۱۰-۲)$$

اگر کمیته تصمیم‌گیرنده دارای k عضو باشد و ضریب اهمیت kامین تصمیم‌گیرنده $\widetilde{w}_{jk} = (w_{jk1}, w_{jk2}, w_{jk3}, w_{jk4})$ (عدد فازی ذوزنقه‌ای) به ازای $j = 1,2,\ldots,n$ باشد، رتبه‌بندی فازی ترکیبی $\widetilde{w}_j = (w_{j1}, w_{j2}, w_{j3}, w_{j4})$ را می‌توان از روابط زیر به دست آورد:

$$w_{j1} = \underset{k}{Min}\{w_{jk1}\} \qquad (۱۱-۲)$$

$$w_{j2} = \frac{\sum_{k=1}^{K} w_{jk2}}{k} \quad (۱۲-۲)$$

$$w_{j3} = \frac{\sum_{k=1}^{K} w_{jk3}}{k} \quad (۱۳-۲)$$

$$w_{j4} = \underset{k}{Max}\{c_{jk4}\} \quad (۱۴-۲)$$

مرحله ۳: بی‌مقیاس کردن ماتریس تصمیم فازی

زمانی که x_{ij}ها به صورت فازی هستند، مسلماً r_{ij}ها نیز فازی خواهند بود. برای بی‌مقیاس کردن به جای محاسبات پیچیده در روش شباهت به گزینه ایده‌آل کلاسیک، در این مرحله از تغییر مقیاس خطی[1] برای تبدیل مقیاس معیارهای مختلف به مقیاس قابل مقایسه استفاده می‌شود.

اگر اعداد فازی به صورت مثلثی باشند، درایه‌های ماتریس تصمیم بی‌مقیاس برای معیارهای مثبت و منفی به ترتیب از روابط زیر محاسبه می‌شود:

جنبه (+)

$$\tilde{r}_{ij} = \left(\frac{a_{ij}}{c_j^*}, \frac{b_{ij}}{c_j^*}, \frac{c_{ij}}{c_j^*}\right) \quad (۱۵-۲)$$

جنبه (-)

$$\tilde{r}_{ij} = \left(\frac{a_j^-}{c_{ij}}, \frac{a_j^-}{b_{ij}}, \frac{a_j^-}{a_{ij}}\right) \quad (۱۶-۲)$$

که در این روابط:

$$\left\{\begin{array}{ll} c_j^* = \max\limits_i c_{ij} & (۱۷-۲) \\ a_j^- = \min\limits_i a_{ij} & (۱۸-۲) \end{array}\right.$$

اگر اعداد فازی به صورت ذوزنقه‌ای باشند، درایه‌های ماتریس تصمیم بی‌مقیاس برای معیارهای مثبت و منفی به ترتیب از روابط زیر محاسبه می‌شود:

1 - Linear scale transformation

$$\tilde{r}_{ij} = \left(\frac{a_{ij}}{d_j^*}, \frac{b_{ij}}{d_j^*}, \frac{c_{ij}}{d_j^*}, \frac{d_{ij}}{d_j^*}\right) \quad \text{(۲-۱۹)}$$

برای معیار (+)

$$\tilde{r}_{ij} = \left(\frac{a_j^-}{d_{ij}}, \frac{a_j^-}{c_{ij}}, \frac{a_j^-}{b_{ij}}, \frac{a_j^-}{a_{ij}}\right) \quad \text{(۲-۲۰)}$$

(−) " "

که در این روابط:

$$\left\{\begin{array}{ll} d_j^* = \max_i d_{ij} & \text{(۲-۲۱)} \\ a_j^- = \min_i a_{ij} & \text{(۲-۲۲)} \end{array}\right\}$$

بنابراین ماتریس تصمیم فازی بی‌مقیاس شده $(\tilde{R})$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\tilde{R} = \left[\tilde{r}_{ij}\right]_{m\times n} \quad i = 1,2,\ldots,m\,;\ j = 1,2,\ldots,n \quad \text{(۲-۲۳)}$$

و یا:

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} \tilde{r}_{11} & \cdots & \tilde{r}_{1j} & \cdots & \tilde{r}_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \tilde{r}_{i1} & \cdots & \tilde{r}_{ij} & \cdots & \tilde{r}_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \tilde{r}_{m1} & \cdots & \tilde{r}_{mj} & \cdots & \tilde{r}_{mn} \end{bmatrix}$$

که m بیانگر تعداد گزینه‌ها و n بیانگر تعداد معیارها می‌باشد.

مرحله ۴: تعیین ماتریس تصمیم فازی وزن‌دار

با توجه به وزن معیارهای مختلف، ماتریس تصمیم فازی وزن‌دار از ضرب کردن ضریب اهمیت مربوط به هر معیار در ماتریس بی‌مقیاس شده فازی و به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\tilde{v}_{ij} = \tilde{r}_{ij} . \tilde{w}_j \quad \text{(۲-۲۴)}$$

اعضای ضریب اهمیت هر معیار

" ماتریس بی‌مقیاس شده فازی

که $\tilde{w}_j$ بیان‌کننده ضریب اهمیت معیار C_j می‌باشد.

بنابراین ماتریس تصمیم فازی وزن‌دار به صورت زیر خواهد بود:

$$\tilde{V} = \left[\tilde{v}_{ij}\right]_{m\times n} \quad i = 1,2,\ldots,m\,;\ j = 1,2,\ldots,n \quad \text{(۲-۲۵)}$$

و یا:

$$\widetilde{V} = \begin{bmatrix} \widetilde{v}_{11} & \dots & \widetilde{v}_{1j} & \dots & \widetilde{v}_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \widetilde{v}_{i1} & \dots & \widetilde{v}_{ij} & \dots & \widetilde{v}_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \widetilde{v}_{m1} & \dots & \widetilde{v}_{mj} & \dots & \widetilde{v}_{mn} \end{bmatrix}$$

اگر اعداد فازی به صورت مثلثی باشند، برای معیارهای با جنبه مثبت و منفی به ترتیب داریم:

$$\widetilde{v}_{ij} = \widetilde{r}_{ij}.\widetilde{w}_j = \left(\frac{a_{ij}}{c_j^*}, \frac{b_{ij}}{c_j^*}, \frac{c_{ij}}{c_j^*}\right).\left(w_{j1}, w_{j2}, w_{j3}\right) = \left(\frac{a_{ij}}{c_j^*}.w_{j1}, \frac{b_{ij}}{c_j^*}.w_{j2}, \frac{c_{ij}}{c_j^*}.w_{j3}\right)$$

$$\widetilde{v}_{ij} = \widetilde{r}_{ij}.\widetilde{w}_j = \left(\frac{a_j^-}{c_{ij}}; \frac{a_j^-}{b_{ij}}; \frac{a_j^-}{a_{ij}}\right).\left(w_{j1}, w_{j2}, w_{j3}\right) = \left(\frac{a_j^-}{c_{ij}}.w_{j1}; \frac{a_j^-}{b_{ij}}.w_{j2}; \frac{a_j^-}{a_{ij}}.w_{j3}\right)$$

اگر اعداد فازی به صورت ذوزنقه‌ای باشند، برای معیارهای با جنبه مثبت و منفی به ترتیب داریم:

$$\widetilde{v}_{ij} = \widetilde{r}_{ij}.\widetilde{w}_j = \left(\frac{a_{ij}}{d_j^*}, \frac{b_{ij}}{d_j^*}, \frac{c_{ij}}{d_j^*}, \frac{d_{ij}}{d_j^*}\right).\left(w_{j1}, w_{j2}, w_{j3}, w_{j4}\right) = \left(\frac{a_{ij}}{d_j^*}.w_{j1}, \frac{b_{ij}}{d_j^*}.w_{j2}, \frac{c_{ij}}{d_j^*}.w_{j3}, \frac{d_{ij}}{d_j^*}.w_{j4}\right)$$

$$\widetilde{v}_{ij} = \widetilde{r}_{ij}.\widetilde{w}_j = \left(\frac{a_j^-}{d_{ij}}; \frac{a_j^-}{c_{ij}}; \frac{a_j^-}{b_{ij}}, \frac{a_j^-}{a_{ij}}\right).\left(w_{j1}, w_{j2}, w_{j3}, w_{j4}\right) = \left(\frac{a_j^-}{d_{ij}}.w_{j1}; \frac{a_j^-}{c_{ij}}.w_{j2}; \frac{a_j^-}{b_{ij}}.w_{j3}, \frac{a_j^-}{a_{ij}}.w_{j4}\right)$$

مرحله۵: یافتن حل ایده‌آل فازی[1] $(FPIS, A^*)$ و حل ضد ایده‌آل فازی[2] $(FNIS, A^-)$

حل ایده‌آل فازی و حل ضد ایده‌آل فازی به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$A^* = \left\{\widetilde{v}_1^*, \widetilde{v}_2^*, \dots, \widetilde{v}_n^*\right\} \quad (۲۶-۲)$$

$$A^- = \left\{\widetilde{v}_1^-, \widetilde{v}_2^-, \dots, \widetilde{v}_n^-\right\} \quad (۲۷-۲)$$

که $\widetilde{v}_i^*$ بهترین مقدار معیار i از بین تمام گزینه‌ها و $\widetilde{v}_i^-$ بدترین مقدار معیار i از بین تمام گزینه‌ها می‌باشد. این مقادیر از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$\widetilde{v}_j^* = \underset{i}{Max}\left\{\widetilde{v}_{ij3}\right\} \quad i = 1,2,\dots,m\ ,\ j = 1,2,\dots,n \quad (۲۸-۲)$$

1 - Fuzzy Positive Ideal Solution=FPIS

2- Fuzzy Negetive Ideal Solution=FNIS

$$\tilde{v}_j^- = \underset{i}{Min}\{\tilde{v}_{ij1}\} \quad i = 1,2,\dots,m\ ,\ j = 1,2,\dots,n \tag{۲-۲۹}$$

گزینه‌هایی که در A^* و A^- قرار می‌گیرند، به ترتیب نشان دهنده گزینه‌های کاملاً بهتر و کاملاً بدتر هستند.

مرحله۶: محاسبه فاصله از حل ایده‌آل و ضد ایده‌آل فازی

فاصله هر گزینه از حل ایده‌آل و ضد ایده‌آل فازی به ترتیب از روابط زیر قابل محاسبه است:

$$S_i^* = \sum_{j=1}^{n} d\left(\tilde{v}_{ij}, \tilde{v}_j^*\right) \quad , \quad i = 1,2,\dots,m \tag{۲-۳۰}$$

$$S_i^- = \sum_{j=1}^{n} d\left(\tilde{v}_{ij}, \tilde{v}_j^-\right) \quad , \quad i = 1,2,\dots,m \tag{۲-۳۱}$$

$d(.,.)$ فاصله بین دو عدد فازی است که اگر (a_1,b_1,c_1) و (a_2,b_2,c_2) دو عدد فازی مثلثی باشد، فاصله دو عدد برابر است با:

$$d_v\left(\tilde{M}_1, \tilde{M}_2\right) = \sqrt{\frac{1}{3}\left[(a_1-a_2)^2 + (b_1-b_2)^2 + (c_1-c_2)^2\right]} \tag{۲-۳۲}$$

همچنین اگر (a_1,b_1,c_1,d_1) و (a_2,b_2,c_2,d_2) دو عدد فازی ذوزنقه‌ای باشد، فاصله دو عدد برابر است با:

$$d_v\left(\tilde{M}_1, \tilde{M}_2\right) = \sqrt{\frac{1}{4}\left[(a_1-a_2)^2 + (b_1-b_2)^2 + (c_1-c_2)^2 + (d_1-d_2)^2\right]} \tag{۲-۳۳}$$

قابل ذکر است که $d\left(\tilde{v}_{ij}, \tilde{v}_j^*\right)$ و $d\left(\tilde{v}_{ij}, \tilde{v}_j^-\right)$ اعداد قطعی هستند.

مرحله۷: محاسبه شاخص شباهت

شاخص شباهت از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$CC_i = \frac{S_i^-}{S_i^* + S_i^-} \quad i = 1,2,\dots,m \tag{۲-۳۴}$$

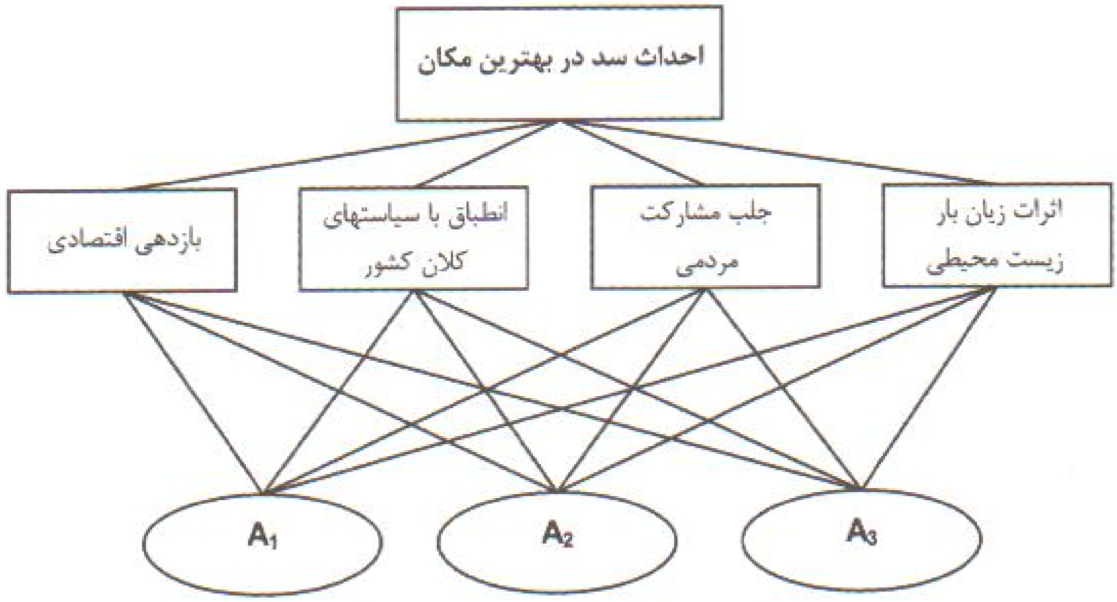
مرحله۸: رتبه‌بندی گزینه‌ها

در این مرحله با توجه به میزان شاخص شباهت، گزینه‌ها رتبه‌بندی می‌شوند به طوری که گزینه‌های با شاخص شباهت بیشتر در اولویت قرار دارند.

۲-۳- چند مثال از به کارگیری روش شباهت به گزینه ایده‌آل فازی

مثال ۱: انتخاب محل احداث سد

برای احداث یک سد بر روی رودخانه‌ای سه گزینه پیشنهاد شده است. تصمیم‌گیرنده می‌خواهد بر اساس چهار معیار؛ C_1: بازدهی سرمایه، C_2: انطباق با سیاست‌های کلان کشور، C_3: جلب مشارکت‌های مردمی و C_4: اثرات زیان بار زیست‌محیطی یکی از سه گزینه را انتخاب کند. معیارهای یک تا سه دارای جنبه مثبت و معیار چهارم جنبه منفی دارد. ساختار سلسله مراتبی این تصمیم‌گیری در شکل زیر نشان داده شده است.



سلسله مراتبی برای انتخاب بهترین محل احداث سد

مرحله ۱: ماتریس تصمیم و بردار وزن معیارها

گزینه‌ها از نظر معیارهای مختلف ارزیابی شده‌اند و نتایج به عنوان ماتریس تصمیم به صورت زیر ارائه شده است:

	C_1^{+}	C_2^{+}	C_3^{+}	C_4^{-}
A_1	تا حدودی کم	زیاد	تا حدودی زیاد	مناسب
A_2	بسیار زیاد	مناسب	زیاد	تا حدودی زیاد
A_3	مناسب	کم	بسیار زیاد	تا حدودی کم

بردار وزن معیارها نیز به صورت زیر ارائه شده است:

معیار	C_1	C_2	C_3	C_4
وزن معیار	بسیار با اهمیت	تا حدودی با اهمیت	تا حدودی کم اهمیت	بی‌تفاوت

برای تشکیل ماتریس تصمیم فازی و بردار وزن فازی از جدول‌های زیر استفاده شده است:

متغیرهای زبانی برای رتبه‌بندی گزینه‌ها

مربوط به ماتریس تصمیم (صفحه قبل)

متغیر زبانی	عدد فازی متناظر
بسیار کم	(۰و۰و۱)
کم	(۰و۱و۳)
تا حدودی کم	(۱و۳و۵)
مناسب	(۳و۵و۷)
تا حدودی زیاد	(۵و۷و۹)
زیاد	(۷و۹و۱۰)
بسیار زیاد	(۹و۱۰و۱۰)

متغیرهای زبانی برای ارزیابی اهمیت معیارها

متغیر زبانی	عدد فازی متناظر
بسیار کم اهمیت	(۰و۰و۰/۱)
کم اهمیت	(۰و۰/۱و۰/۳)
تا حدودی کم اهمیت	(۰/۱و۰/۳و۰/۵)
بی‌تفاوت	(۰/۳و۰/۵و۰/۷)
تا حدودی با اهمیت	(۰/۵و۰/۷و۰/۹)
با اهمیت	(۰/۷و۰/۹و۱)
بسیار با اهمیت	(۰/۹و۱و۱)

با استفاده از این دو جدول، بردار وزن و ماتریس تصمیم به ترتیب به صورت زیر خواهند بود:

$\tilde{W}=$

معیار	C_1	C_2	C_3	C_4
وزن معیار	(۰/۹و۱و۱)	(۰/۵و۰/۷و۰/۹)	(۰/۱و۰/۳و۰/۵)	(۰/۳و۰/۵و۰/۷)

	C_1	C_2	C_3	C_4
A_1	(۱و۳و۵)	(۷و۹و۱۰)	(۵و۷و۹)	(۳و۵و۷)
A_2	(۹و۱۰و۱۰)	(۳و۵و۷)	(۷و۹و۱۰)	(۵و۷و۹)
A_3	(۳و۵و۷)	(۰و۱و۳)	(۹و۱۰و۱۰)	(۱و۳و۵)

مرحله۲: بی‌مقیاس کردن ماتریس تصمیم

معیارهای اول تا سوم جنبه مثبت دارند بنابراین برای بی‌مقیاس کردن از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$\tilde{r}_{ij} = \left(\frac{a_{ij}}{c_j^*}, \frac{b_{ij}}{c_j^*}, \frac{c_{ij}}{c_j^*}\right)$$

به عنوان مثال برای درایه مربوط به سطر اول، ستون اول ماتریس تصمیم داریم:

$$\tilde{r}_{11} = \left(\frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{5}{10}\right) = (0.1, 0.3, 0.5)$$

معیار چهارم جنبه منفی دارد بنابراین برای بی‌مقیاس کردن از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$\tilde{r}_{ij} = \left(\frac{a_j^-}{c_{ij}}, \frac{a_j^-}{b_{ij}}, \frac{a_j^-}{a_{ij}}\right)$$

به عنوان مثال برای درایه مربوط به سطر دوم، ستون چهارم ماتریس تصمیم داریم:

$$\tilde{r}_{24} = \left(\frac{1}{9}, \frac{1}{7}, \frac{1}{5}\right) = (0.111, 0.143, 0.2)$$

در تقسیم جهت برعکس می‌شود:

سایر درایه‌های ماتریس تصمیم بی‌مقیاس شده به طور مشابهی محاسبه می‌شوند که نتایج محاسبات به شرح زیر خواهد بود:

$\tilde{R} =$

	C_1	C_2	C_3	C_4
A_1	(۰/۱و۰/۳و۰/۵)	(۰/۷و۰/۹و۱)	(۰/۵و۰/۷و۰/۹)	(۰/۱۴۳و۰/۲و۰/۳۳۳)
A_2	(۰/۹و۱و۱)	(۰/۳و۰/۵و۰/۷)	(۰/۷و۰/۹و۱)	(۰/۱۱۱و۰/۱۴۳و۰/۲)
A_3	(۰/۳و۰/۵و۰/۷)	(۰و۰/۱و۰/۳)	(۰/۹و۱و۱)	(۰/۲و۰/۳۳۳و۱)

مرحله۳: به دست آوردن ماتریس تصمیم بی‌مقیاس وزن‌دار

نحوه محاسبه چند نمونه از درایه‌های این ماتریس به شرح زیر است:

$$\tilde{v}_{11} = \tilde{r}_{11}.\tilde{w}_1 = (0.1, 0.3, 0.5).(0.9, 1, 1) = (0.09, 0.3, 0.5)$$

$$\tilde{v}_{32} = \tilde{r}_{32}.\tilde{w}_2 = (0, 0.1, 0.3).(0.5, 0.7, 0.9) = (0, 0.07, 0.27)$$

سایر درایه‌های ماتریس به طور مشابهی محاسبه می‌شوند که نتایج محاسبات به شرح زیر خواهد بود:

$\tilde{V} = \tilde{R} \cdot \tilde{W}$

$\tilde{V} =$

	C_1	C_2	C_3	C_4
A_1	(۰/۰۹و۰/۳و۰/۵)	(۰/۳۵و۰/۶۳و۰/۹)	(۰/۰۵و۰/۲۱و۰/۴۵)	(۰/۰۴۳و۰/۱و۰/۲۳)
A_2	(۰/۸۱و۱و۱)	(۰/۱۵و۰/۳۵و۰/۶۳)	(۰/۰۷و۰/۲۷و۰/۵)	(۰/۰۳۳و۰/۰۷۱و۰/۱۴)
A_3	(۰/۲۷و۰/۵و۰/۷)	(۰و۰/۰۷و۰/۲۷)	(۰/۰۹و۰/۳و۰/۵)	(۰/۰۶و۰/۱۶۷و۰/۷)

مرحله۴: محاسبه حل ایده‌آل (A^*) و ضد ایده‌آل (A^-)

حل ایده‌آل فازی برای معیارهای مختلف به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\tilde{v}_1^* = (Max(0.5,1,0.7), Max(0.5,1,0.7), Max(0.5,1,0.7)) = (1,1,1)$$
$$\tilde{v}_2^* = (Max(0.9,0.63,0.27), Max(0.9,0.63,0.27), Max(0.9,0.63,0.27)) = (0.9,0.9,0.9)$$
$$\tilde{v}_3^* = (Max(0.45,0.5,0.5), Max(0.45,0.5,0.5), Max(0.45,0.5,0.5)) = (0.5,0.5,0.5)$$
$$\tilde{v}_4^* = (Max(0.23,0.14,0.7), Max(0.23,0.14,0.7), Max(0.23,0.14,0.7)) = (0.7,0.7,0.7)$$

حل ضد ایده‌آل فازی برای معیارهای مختلف به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\tilde{v}_1^- = (Min(0.09,0.81,0.27), Min(0.09,0.81,0.27), Min(0.09,0.81,0.27)) = (0.09,0.09,0.09)$$
$$\tilde{v}_2^- = (Min(0.35,0.15,0), Min(0.35,0.15,0), Min(0.35,0.15,0)) = (0,0,0)$$
$$\tilde{v}_3^- = (Min(0.05,0.07,0.09), Min(0.05,0.07,0.09), Min(0.05,0.07,0.09)) = (0.05,0.05,0.05)$$
$$\tilde{v}_4^- = (Min(0.04,0.03,0.06), Min(0.04,0.03,0.06), Min(0.04,0.03,0.06)) = (0.03,0.03,0.03)$$

بنابراین حل ایده‌آل و ضد ایده‌آل فازی به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$A^* = [(1,1,1),(0.9,0.9,0.9),(0.5,0.5,0.5),(0.7,0.7,0.7)]$$
$$A^- = [(0.09,0.09,0.09),(0,0,0),(0.05,0.05,0.05),(0.03,0.03,0.03)]$$

مرحله۵: تعیین فاصله هر گزینه از حل ایده‌آل و ضد ایده‌آل (S_i^* و S_i^-) و شاخص شباهت

فاصله گزینه اول از حل ایده‌آل فازی هر یک از معیارها به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$S_{11}^* = \sqrt{\frac{1}{3}\left[(0.09-1)^2 + (0.3-1)^2 + (0.5-1)^2\right]} = 0.723$$ → (عناصر گزینه اول ماتریس $\tilde{V}$ - عناصر A^*)

$$S_{12}^* = \sqrt{\frac{1}{3}\left[(0.35-0.9)^2 + (0.63-0.9)^2 + (0.9-0.9)^2\right]} = 0.354$$
$$S_{13}^* = \sqrt{\frac{1}{3}\left[(0.05-0.5)^2 + (0.21-0.5)^2 + (0.45-0.5)^2\right]} = 0.31$$
$$S_{14}^* = \sqrt{\frac{1}{3}\left[(0.043-0.7)^2 + (0.1-0.7)^2 + (0.23-0.7)^2\right]} = 0.58$$

در نتیجه فاصله گزینه اول از حل ایده‌آل فازی برابر است با:

$$S_1^* = 0.723 + 0.354 + 0.31 + 0.58 = 1.97$$

فاصله گزینه اول از حل ضد ایده‌آل فازی هر یک از معیارها به صورت زیر محاسبه می‌شود:

نتیجه ۵ عدد اخیر در ردیف (گزینه) اول جدول صفحه بعد (ماتریس هر گزینه از حل ایده‌ال)

$$S_{11}^{-}=\sqrt{\frac{1}{3}\left[(0.09-0.09)^2+(0.3-0.09)^2+(0.5-0.09)^2\right]}=0.266 \longrightarrow$$ (عناصر گزینه اول ماتریس V - عناصر A^-)

$$S_{12}^{-}=\sqrt{\frac{1}{3}\left[(0.35-0)^2+(0.63-0)^2+(0.9-0)^2\right]}=0.666$$

$$S_{13}^{-}=\sqrt{\frac{1}{3}\left[(0.05-0.05)^2+(0.21-0.05)^2+(0.45-0.05)^2\right]}=0.249$$

$$S_{14}^{-}=\sqrt{\frac{1}{3}\left[(0.043-0.03)^2+(0.1-0.03)^2+(0.23-0.03)^2\right]}=0.101$$

در نتیجه فاصله گزینه اول از حل ضد ایده‌آل فازی برابر است با:

$$S_1^{-}=0.266+0.666+0.249+0.122=1.3$$

لذا شاخص شباهت برای گزینه اول برابر است با:

$$CC_1=\frac{1.3}{1.97+1.3}=0.4$$

محاسبات مشابهی برای سایر گزینه‌ها انجام شده است که در جداول زیر نتایج محاسبات مربوط به فاصله بین هر گزینه از حل ایده‌آل و حل ضد ایده‌آل درج شده است.

فاصله هر گزینه از حل ایده‌آل

	C_1	C_2	C_3	C_4	فاصله هر گزینه از حل ایده‌آل
$d(A_1, A^*)$	۰/۷۲۳	۰/۳۵۴	۰/۳۱	۰/۵۸	۱/۹۷
$d(A_2, A^*)$	۰/۱۱	۰/۵۵۹	۰/۲۸۲	۰/۶۲	۱/۵۷
$d(A_3, A^*)$	۰/۵۳۹	۰/۷۹۵	۰/۲۶۳	۰/۴۸۱	۲/۰۸

فاصله هر گزینه از حل ضد ایده‌آل

	C_1	C_2	C_3	C_4	فاصله هر گزینه از حل ضد ایده‌آل
$d(A_1, A^-)$	۰/۲۶۶	۰/۶۶۶	۰/۲۴۹	۰/۱۲۲	۱/۳
$d(A_2, A^-)$	۰/۸۵۱	۰/۴۲۵	۰/۲۸۹	۰/۰۶۵	۱/۶۳
$d(A_3, A^-)$	۰/۴۳۷	۰/۱۶۱	۰/۲۹۸	۰/۳۹۳	۱/۲۹

بر اساس فاصله هر گزینه از حل ایده‌آل و فاصله هر گزینه از حل ضد ایده‌آل، شاخص شباهت محاسبه و در جدول زیر نشان داده شده است.

	A_1	A_2	A_3
فاصله از حل ایده‌آل	۱/۹۷	۱/۵۷	۲/۰۸
فاصله از حل ضد ایده‌آل	۱/۳	۱/۶۳	۱/۲۹
شاخص شباهت	۰/۴	۰/۵۱	۰/۳۸

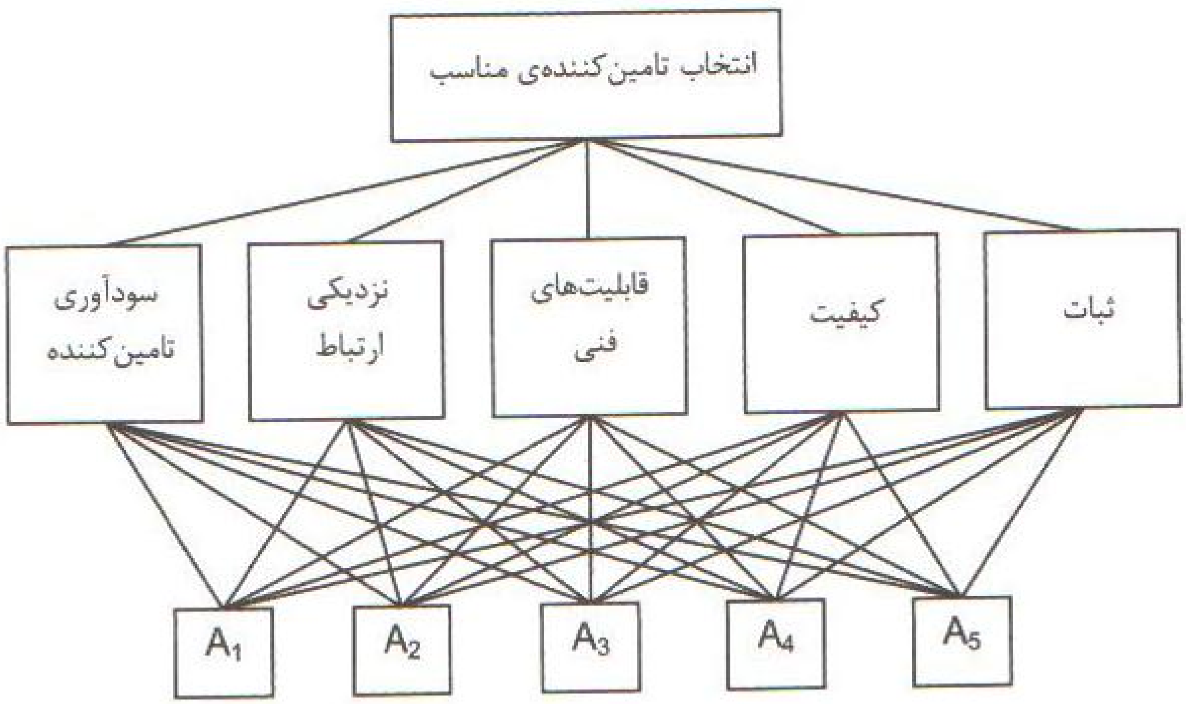
مرحله۶: رتبه‌بندی گزینه‌ها

با توجه به محاسبات فوق رتبه‌بندی گزینه‌ها به شرح زیر است:

$$A_2 > A_1 > A_3$$

مثال۲: انتخاب تأمین‌کننده‌ی مواد

یک شرکت سازنده به منظور تأمین مواد لازم در نظر دارد از بین پنج تأمین‌کننده (A_1، A_2، A_3، A_4 و A_5)، گزینه مناسب را انتخاب کند. بدین منظور تیم تصمیم‌گیرنده‌ای متشکل از سه نفر (D_1، D_2 و D_3) ایجاد شده است. به منظور انتخاب تأمین‌کننده‌ی مناسب پنج معیار در نظر گرفته شده‌اند: C_1: سودآوری تأمین‌کننده، C_2: نزدیکی ارتباط، C_3: قابلیت‌های فنی، C_4: کیفیت، C_5: ثبات. ساختار سلسله مراتبی این مسأله در شکل زیر نشان داده شده است.



ساختار سلسله مراتبی انتخاب تأمین‌کننده مناسب