

TOPSIS

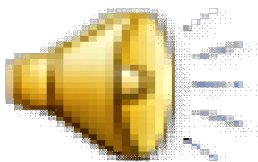
**(Technique for Order-Preference by similarity
to Ideal Solution)**

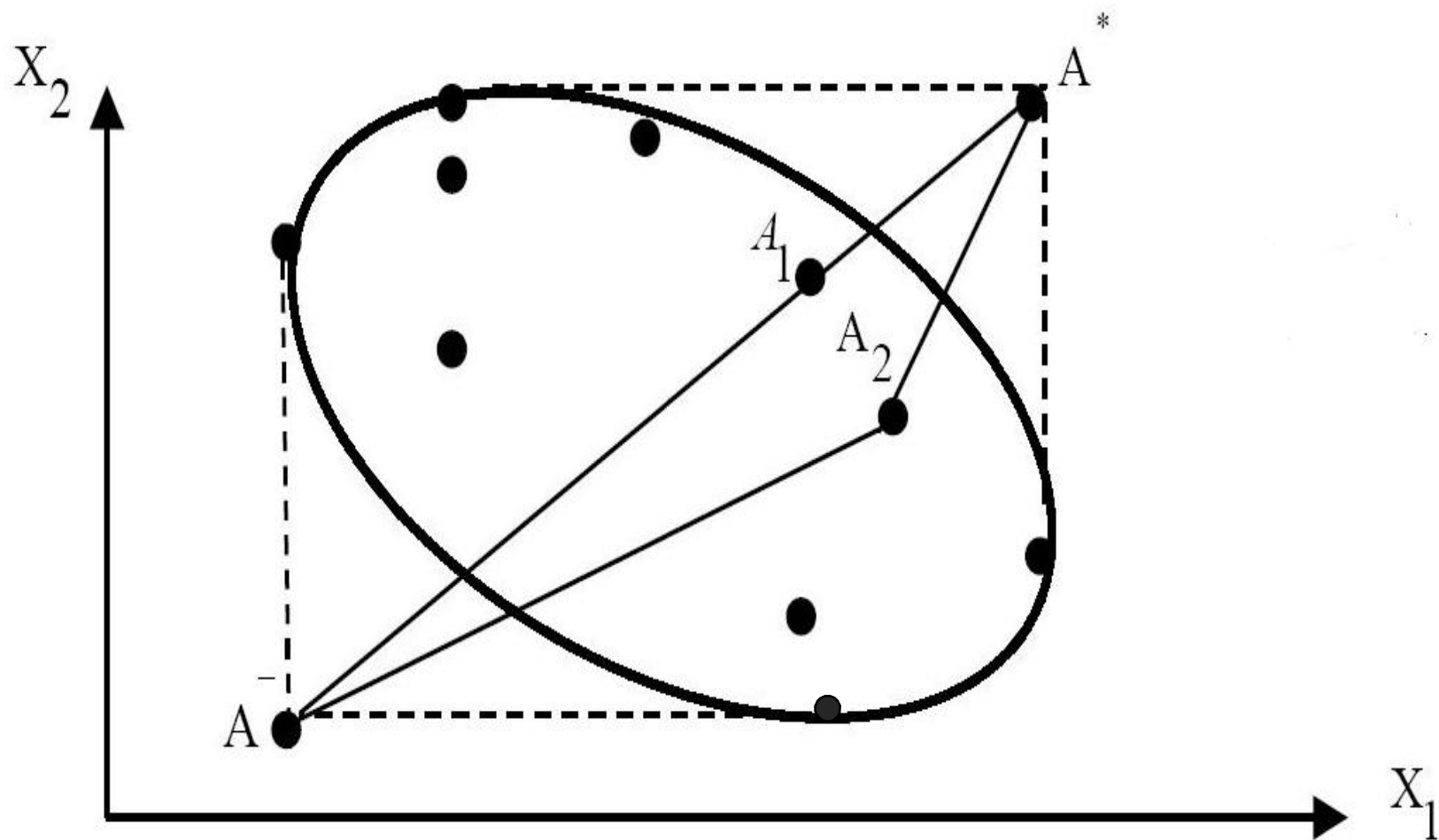
روش TOPSIS

در این روش علاوه بر در نظر گرفتن فاصله یک گزینه A_i از نقطه ایدآل، فاصله آن از نقطه ایدآل منفی هم در نظر گرفته می شود. بدان معنی که گزینه انتخابی باید دارای کمترین فاصله از راه حل ایدآل بوده و در عین حال دارای دورترین فاصله از راه حل منفی باشد. واقعیات زیر بنایی این روش بدین قرار است :

الف: مطلوبیت هر شاخص باید به طور یکنواخت افزایشی (یا کاهششی) باشد (هر چه r_{ij} بیشتر، مطلوبیت بیشتر و یا برعکس) که بدان صورت بهترین ارزش موجود از یک شاخص نشان دهنده ایدآل آن بوده و بدترین ارزش موجود از آن مشخص کننده ایدآل منفی برای آن خواهد بود.

ب: فاصله یک گزینه از ایدآل (یا از ایدآل منفی) ممکن است به صورت فاصله اقلیدسی (از توان دوم) و یا به صورت مجموع قدر مطلق از فواصل خطی (معروف به فواصل بلوکی) محاسبه گردد، که این امر بستگی به نرخ تبادل و جایگزینی در بین شاخص ها دارد.





فاصله های اقلیدسی راه حل ایده ال و راه حل ایده ال منفی در فضای دو بعدی

TOPSIS Method

الگوریتم :

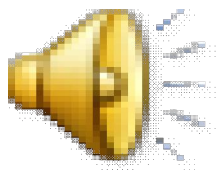
قدم یک - تبدیل ماتریس تصمیم گیری موجود به یک ماتریس “بی مقیاس شده” با استفاده از فرمول :

$$n_{ij} = \frac{r_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m r_{ij}^2}}$$

قدم دوم - ایجاد ماتریس “بی مقیاس” وزین با مفروض بودن بردار W به عنوان ورودی به الگوریتم. یعنی :

$$W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\} \approx (DM \text{ مفروض از})$$

$$\text{ماتریس بی مقیاس وزین} = N_D \cdot W_{n \times n} = \begin{matrix} & \begin{matrix} V_{11} & \dots & V_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ V_{m1} & \dots & V_{mn} \end{matrix} \end{matrix}$$



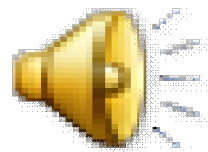
TOPSIS Method

به طوری که N_D ماتریسی است که امتیازات شاخص ها در آن “بی مقیاس” و قابل مقایسه شده است، و $W_{n \times n}$ ماتریسی است قطری که فقط عناصر قطر اصلی آن غیر صفر خواهد بود.

قدم سوم - مشخص نمودن راه حل ایدآل و راه حل - منفی
برای گزینه ایدآل (A^+) و ایدآل منفی (A^-) تعریف کنیم:

$$A^+ = \left\{ \left(\max_i V_{ij} | j \in J \right), \left(\min_i V_{ij} | j \in J' \right) | i = 1, 2, \dots, m \right\}$$
$$= \{V_1^+, V_2^+, \dots, V_j^+, \dots, V_n^+\}$$

$$A^- = \left\{ \left(\min_i V_{ij} | j \in J \right), \left(\max_i V_{ij} | j \in J' \right) | i = 1, 2, \dots, m \right\}$$
$$= \{V_1^-, V_2^-, \dots, V_j^-, \dots, V_n^-\}$$



$$I = \{j = 1, 2, \dots, n \mid \text{زهاي مربوط به سود}\}$$

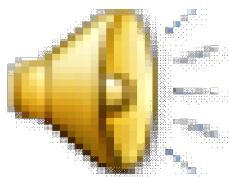
$$I' = \{j = 1, 2, \dots, n \mid \text{زهاي مربوط به هزينه}\}$$

قدم چهارم - محاسبه اندازه جدایی (فاصله)

فاصله گزینه i ام با ایدال ها با استفاده از روش اقلیدسی بدین قرار است :

$$d_{i+} = \text{فاصله گزینه } i \text{ ام از ایدال} = \left\{ \sum_{j=1}^n (V_{ij} - V_j^+)^2 \right\}^{.5} ; i = 1, 2, \dots, m$$

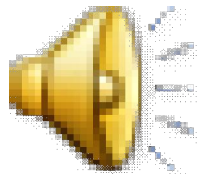
$$d_{i-} = \text{فاصله گزینه } i \text{ ام از ایدال منفي} = \left\{ \sum_{j=1}^n (V_{ij} - V_j^-)^2 \right\}^{.5} ; i = 1, 2, \dots, m$$



قدم پنجم - محاسبه نزدیکی نسبی A_i به راه حل ایدآل. این نزدیکی نسبی را به صورت زیر تعریف می کنیم :

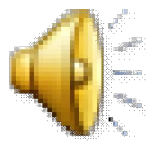
$$cl_{i+} = \frac{d_{i-}}{(d_{i+} + d_{i-})} \quad ; 0 \leq cl_{i+} \leq 1 ; i = 1, 2, \dots, m$$

ملاحظه می شود که چنانچه $A_i = A^+$ گردد آنگاه $d_{i+} = 0$ بوده خواهیم داشت : $cl_{i+} = 1$ و در صورتی که $A_i = A^-$ شود آنگاه $cl_{i+} = 0$ خواهد شد. بنابراین هر اندازه گزینه A_i به راه حل ایدآل (A^+) نزدیک تر باشد، ارزش cl_{i+} به واحد نزدیکتر خواهد بود.



قدم ششم - رتبه بندی گزینه ها، بر اساس ترتیب Cl_{i+} می توان گزینه های موجود از مساله مفروض را رتبه بندی نمود.

مراحل فوق در قالب یک مثال انجام می گیرد.



مثال:

مسئله زیر را در نظر بگیرید :

	هزینه X_1^-	استحکام X_2^+	وجهه ملي X_3^+	ظرفیت X_4^+	سختي کار X_5^+
A_1	3	5	9	24000	1
A_2	1.2	7	5	25000	3
A_3	1.5	9	3	32000	7

(توجه شود که نحوه استفاده از مقیاس دو قطبی، امتیازات X_5^- را در جهت مثبت همچو سودآوری ارزیابی کرده است.)
بردار W به صورت زیر مفروض است.

$$W = \{ .179, .062, .211, .017, .531 \}$$

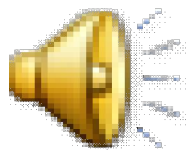


حل :

قدم یکم : ماتریس D را با استفاده از رابطه زیر به ماتریس N_D تبدیل می نماییم :

$$n_{ij} = \frac{r_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m r_{ij}^2}} \quad (m = 3)$$

$$N_D = \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{matrix} \begin{vmatrix} .842 & .402 & .839 & .509 & .130 \\ .337 & .562 & .466 & .530 & .390 \\ .421 & .723 & .280 & .678 & .911 \end{vmatrix}$$

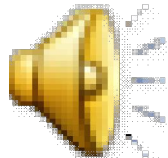


قدم دوم - برای ماتریس V داریم :

$$V = N_D \cdot W_{n \times n} \times \begin{bmatrix} .179 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .062 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .211 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .017 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .531 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} .842 & .402 & .839 & .509 & .130 \\ .337 & .562 & .466 & .530 & .390 \\ .421 & .723 & .280 & .678 & .911 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} .179 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .062 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .211 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .017 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .531 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} .151 & .025 & .177 & .009 & .069 \\ .060 & .035 & .098 & .009 & .207 \\ .075 & .045 & .059 & .011 & .484 \end{bmatrix}$$



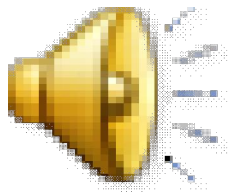
قدم سوم - مشخص نمودن راه حل ایدآل و راه حل ایدآل منفی :

$$A^+ = \left\{ \min_i V_{i1}, \max_i V_{i2}, \max_i V_{i3}, \max_i V_{i4}, \max_i V_{i5} \right\}$$

$$= \{.060, .045, .177, .011, .484\}$$

$$A^- = \left\{ \max_i V_{i1}, \min_i V_{i2}, \min_i V_{i3}, \min_i V_{i4}, \min_i V_{i5} \right\}$$

$$= \{.151, .025, .059, .009, .069\}$$



قدم چهارم - محاسبه فواصل :

$$d_{i+} = \left\{ \sum_{j=1}^5 (V_{ij} - V_j^+)^2 \right\}^{.5}$$

$$d_{1+} = .425$$

$$d_{2+} = .288$$

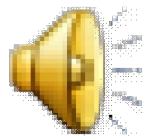
$$d_{3+} = .12$$

$$d_{i-} = \left\{ \sum_{j=1}^5 (V_{ij} - V_j^-)^2 \right\}^{.5}$$

$$d_{1-} = .118$$

$$d_{2-} = .170$$

$$d_{3-} = .422$$



قدم پنجم - محاسبه نزدیکی نسبی A_i به ایدآل

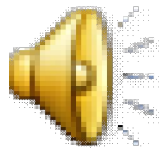
$$cl_{i+} = \frac{d_{i-}}{d_{i+} + d_{i-}}, i = 1, 2, 3$$

$$cl_{1+} = .217$$

$$cl_{2+} = .371$$

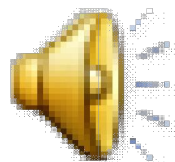
$$cl_{3+} = .778$$

بنابراین :



قدم ششم - رتبه بندی گزینه ها به ترتیب ارجحیت عبارتند از :

$$\begin{Bmatrix} A_3 \\ A_2 \\ A_1 \end{Bmatrix}$$



1- اطلاعات ورودی به روش TOPSIS شامل بردار اوزان (W) برای شاخصها بوده و خروجی آن به صورت رتبه بندی برای گزینه ها می باشد.

2- فرض TOPSIS بر این است که مطلوبیت برای هر یک از شاخصها به طور یکنواخت افزایشی (یا کاهششی) است، که این فرض برای اکثر موارد نیز فرض معتبری است.

3- برای محاسبه فاصله گزینه A_i از ایدآل ها می توان از فواصل بلوکی استفاده نمود، به طوری که برای فاصله مثلا بین دو گزینه A_i و A_k داریم :

$$d_{ik} = \sum_{j=1}^n |v_{ij} - v_{kj}| \quad ; \quad j, k = 1, 2, \dots, m ; \quad i \neq k$$



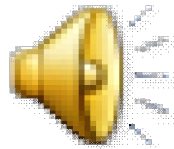
با استفاده از فواصل بلوکی می توان نشان داد که :

$$d_{i+} + d_{i-} = k \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, m$$

به طوری که K یک ثابت مثبت و معلوم است. این رابطه می رساند که گزینه با کوتاه ترین فاصله از ایدآل باضروره دارای بیشترین فاصله از ایدآل منفی خواهد بود، در حالی که این اصل برای مقیاس اقلیدسی صحت ندارد.

استفاده از “فواصل بلوکی” برای مواردی مناسب است که نرخ تبادل در بین شاخص ها ثابت و برابر با واحد است. ($\lambda = 1$) همچو مورد استفاده از روش “SAW”. نرخ تبادل رد بین دو شاخص برابر با نسبتی از تغییر در یک شاخص است که دقیقا تغییری در شاخص دوم را جبران می کند.

ثابت بودن نرخ جایگزینی به ازای ($\lambda = 1$) می رساند که منحنی های بی تفاوتی (منحنی که DM دارای مطلوبیت یا ارجحیت یکسان از انتخاب نقاط واقع بر روی آن خواهد داشت) به صورت خط مستقیم و با شیب 1- خواهند بود. البته مورد توجه است که موارد با نرخ تبادل ثابت برای تصمیم گیری می تواند نادر باشد.



4- نتیجه حاصل از استفاده از روش معروف "SAW" یک مورد خاص از روش TOPSIS با استفاده از "فواصل بلوکی می باشد.

می دانیم که مناسبترین گزینه از روش "SAW" بدین صورت است :

$$A^* = \left\{ A_i \mid \max_i \sum_{j=1}^n v_{ij} \right\} ; v_{ij} = n_{ij} \cdot W_j$$

از طرف دیگر مناسب ترین گزینه از روش TOPSIS با استفاده از فواصل بلوکی به صورت زیر است :

$$A^* = \left\{ A_i \mid \max_i cl_{i+} \right\} ; cl_{i+} = \frac{d_{i-}}{k}$$

آنگاه نشان داده می شود :

$$A^* = \left\{ A_i \mid \max_i \sum_{j=1}^n v_{ij} \right\} = \left\{ A_i \mid \max_i cl_{i+} \right\}$$

